

62 олімпіада юних математиків

2011-2012 навч. рік

6 клас

1. Тетянка сказала: «В Андрійка більше ста книг». Данилко заперечив: «Ні, менше». Марійка сказала: «Ну, хоча б одна книга у нього, напевно, є». Скільки книг може бути в Андрійка, якщо з цих трьох тверджень рівно одне істинне?
2. Сашко, Борис і Василь збирали гриби. Борис знайшов грибів на 20% більше, ніж Сашко, але на 20% менше, ніж Василь. На скільки відсотків більше грибів знайшов Василь, ніж Сашко?
3. Відновити запис множення (замість зірочок поставити числа, щоб запис множення був вірним) та пояснити свої міркування.

		6	*
	*	*	*

		*	*
	*	*	

*	*		
-----		*	6
4. Як розмістити 10 точок на 5 прямих так, щоб на кожній було по 4 точки?
5. Петро та Іван грають в гру. За першим ходом Петро називає число, що не перевищує 6, а Іван додає до нього деяке число, що також не перевищує 6, і називає суму. Далі Петро до названої суми додає число не більше 6 і називає нову суму і т.д. Виграє той, хто першим назве число 2012. Хто може забезпечити собі виграш?

62 олімпіада юних математиків

2011-2012 навч. рік

6 клас

1. Тетянка сказала: «В Андрійка більше ста книг». Данилко заперечив: «Ні, менше». Марійка сказала: «Ну, хоча б одна книга у нього, напевно, є». Скільки книг може бути в Андрійка, якщо з цих трьох тверджень рівно одне істинне?
2. Сашко, Борис і Василь збирали гриби. Борис знайшов грибів на 20% більше, ніж Сашко, але на 20% менше, ніж Василь. На скільки відсотків більше грибів знайшов Василь, ніж Сашко?
3. Відновити запис множення (замість зірочок поставити числа, щоб запис множення був вірним) та пояснити свої міркування.

		6	*
	*	*	*

		*	*
	*	*	

*	*		
-----		*	6
4. Як розмістити 10 точок на 5 прямих так, щоб на кожній було по 4 точки?
5. Петро та Іван грають в гру. За першим ходом Петро називає число, що не перевищує 6, а Іван додає до нього деяке число, що також не перевищує 6, і називає суму. Далі Петро до названої суми додає число не більше 6 і називає нову суму і т.д. Виграє той, хто першим назве число 2012. Хто може забезпечити собі виграш?

6 класс

1. Танюша сказала: «У Андрея больше ста книг». Данилка возразил: «Нет, меньше». Маринка сказала: «Ну, хотя бы одна книга у него, наверняка, есть». Сколько книг может быть у Андрея, если из этих трёх утверждений ровно одно истинное?
2. Саша, Борис и Василий собирали грибы. Борис нашел грибов на 20% больше, чем Саша, но на 20% меньше, чем Василий. На сколько процентов больше грибов нашел Василий, чем Саша?
3. Восстановить запись умножения (вместо звездочек поставить числа, чтобы запись умножения была верной) и пояснить свои размышления.

			6	*
		*	*	*
			<hr/>	
			*	*
		*	*	
	*	*		
	<hr/>		*	*
	*	*	*	6
4. Как разместить 10 точек на 5 прямых так, чтобы на каждой было по 4 точки?
5. Петр и Иван играют в игру. Первым ходом Петр называет число, не превосходящее 6, а Иван прибавляет к нему некоторое число, которое также не превосходит 6, и называет сумму. Далее Петр к названной сумме прибавляет число, не превосходящее 6, и называет новую сумму и т.д. Выигрывает тот, кто первым назовет число 2012. Кто может обеспечить себе выигрыш?

6 класс

1. Танюша сказала: «У Андрея больше ста книг». Данилка возразил: «Нет, меньше». Маринка сказала: «Ну, хотя бы одна книга у него, наверняка, есть». Сколько книг может быть у Андрея, если из этих трёх утверждений ровно одно истинное?
2. Саша, Борис и Василий собирали грибы. Борис нашел грибов на 20% больше, чем Саша, но на 20% меньше, чем Василий. На сколько процентов больше грибов нашел Василий, чем Саша?
3. Восстановить запись умножения (вместо звездочек поставить числа, чтобы запись умножения была верной) и пояснить свои размышления.

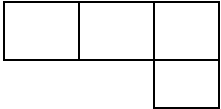
			6	*
		*	*	*
			<hr/>	
			*	*
		*	*	
	*	*		
	<hr/>		*	*
	*	*	*	6
4. Как разместить 10 точек на 5 прямых так, чтобы на каждой было по 4 точки?
5. Петр и Иван играют в игру. Первым ходом Петр называет число, не превосходящее 6, а Иван прибавляет к нему некоторое число, которое также не превосходит 6, и называет сумму. Далее Петр к названной сумме прибавляет число, не превосходящее 6, и называет новую сумму и т.д. Выигрывает тот, кто первым назовет число 2012. Кто может обеспечить себе выигрыш?

*На виконання роботи відводиться 3 години
Кожне завдання оцінюється в 7 балів
Використання калькуляторів не дозволяється*

62 олімпіада юних математиків

2011-2012 навч. рік

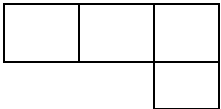
7 клас

1. Послідовність чисел починається з 7. Далі кожне наступне число – це сума цифр квадрата попереднього числа, збільшеного на 1. Знайти число, яке буде написано на 2011 місці.
2. Зібрали 100кг грибів. Виявилось, що вологість їх дорівнює 99%. Коли гриби підсушили, вологість їх зменшилась до 98%. Якою стала маса цих грибів після підсушування?
3. Петрик з'їв $\frac{1}{3}$ всіх яблук і ще 2 яблука, Миколка з'їв $\frac{1}{4}$ всіх яблук і ще 1 яблуко, а Вітя – половину тих яблук, що залишилися після Петрика і Миколки. Після цього залишилась $\frac{1}{6}$ від початкової кількості яблук. Скільки яблук було спочатку?
4. В купе одного з вагонів потягу їдуть шість пасажирів, що мешкають у різних містах: Москві, Санкт-Петербурзі, Мінську, Києві, Харкові, Одесі. Їх прізвища: Андріїв, Борисов, Васильєв, Григор'єв, Дмитрієв, Єлісеєв.
При посадці Васильєв допомагав одеситу грузити багаж. В дорозі з'ясувалось, що Андріїв і москвич – лікарі, Дмитрієв і петербуржець – учителі, Васильєв і мінчанин – інженери. Борисов і Єлісеєв – служили в армії, а мінчанин в армії не служив. Андріїв і харків'янин вийшли в Києві, а Васильєв поїхав далі. Єлісеєв сперечався з петербуржцем про користь нових ліків. Визначити місце проживання кожного з пасажирів, та їх професії.
5. Чи можна закласти таблицю 10×14 фігурками вигляду  так, щоб вони не перетиналися та не виходили за межі таблиці?

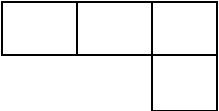
62 олімпіада юних математиків

2011-2012 навч. рік

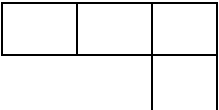
7 клас

5. Послідовність чисел починається з 7. Далі кожне наступне число – це сума цифр квадрата попереднього числа, збільшеного на 1. Знайти число, яке буде написано на 2011 місці.
6. Зібрали 100кг грибів. Виявилось, що вологість їх дорівнює 99%. Коли гриби підсушили, вологість їх зменшилась до 98%. Якою стала маса цих грибів після підсушування?
7. Петрик з'їв $\frac{1}{3}$ всіх яблук і ще 2 яблука, Миколка з'їв $\frac{1}{4}$ всіх яблук і ще 1 яблуко, а Вітя – половину тих яблук, що залишилися після Петрика і Миколки. Після цього залишилась $\frac{1}{6}$ від початкової кількості яблук. Скільки яблук було спочатку?
8. В купе одного з вагонів потягу їдуть шість пасажирів, що мешкають у різних містах: Москві, Санкт-Петербурзі, Мінську, Києві, Харкові, Одесі. Їх прізвища: Андріїв, Борисов, Васильєв, Григор'єв, Дмитрієв, Єлісеєв.
При посадці Васильєв допомагав одеситу грузити багаж. В дорозі з'ясувалось, що Андріїв і москвич – лікарі, Дмитрієв і петербуржець – учителі, Васильєв і мінчанин – інженери. Борисов і Єлісеєв – служили в армії, а мінчанин в армії не служив. Андріїв і харків'янин вийшли в Києві, а Васильєв поїхав далі. Єлісеєв сперечався з петербуржцем про користь нових ліків. Визначити місце проживання кожного з пасажирів, та їх професії.
5. Чи можна закласти таблицю 10×14 фігурками вигляду  так, щоб вони не перетиналися та не виходили за межі таблиці?

7 класс

1. Последовательность чисел начинается с 7. Дальше каждое последующее число – это сумма цифр квадрата предыдущего числа, увеличенного на 1. Найти число, которое будет написано на 2011 месте.
2. Собрали 100 кг грибов. Выяснилось, что влажность их равна 99%. Когда грибы подсушили, влажность их уменьшилась до 98%. Какой стала масса этих грибов после подсушивания?
3. Петя съел $\frac{1}{3}$ всех яблок и еще 2 яблока, Коля съел $\frac{1}{4}$ всех яблок и еще 1 яблоко, а Витя – половину тех яблок, которые остались после Пети и Коли. После этого осталось $\frac{1}{6}$ от начального количества яблок. Сколько яблок было сначала?
4. В купе одного из вагонов поезда едут шесть пассажиров, живущих в разных городах: Москве, Санкт-Петербурге, Минске, Киеве, Харькове, Одессе. Их фамилии: Андреев, Борисов, Васильев, Григорьев, Дмитриев, Елисеев. При посадке Васильев помогал одесситу грузить багаж. В дороге выяснилось, что Андреев и москвич – врачи, Дмитриев и петербуржец – учителя, Васильев и минчанин – инженеры. Борисов и Елисеев – служили в армии, а минчанин в армии не служил. Андреев и харьковчанин вышли в Киеве, а Васильев поехал дальше. Елисеев вел спор с петербуржцем о пользе нового лекарства. Определить местожительство каждого из пассажиров, а затем указать их профессии.
5. Можно ли заложить таблицу 10×14 фигурками вида  так, чтобы они не пересекались и не выходили за рамки таблицы?

7 класс

5. Последовательность чисел начинается с 7. Дальше каждое последующее число – это сумма цифр квадрата предыдущего числа, увеличенного на 1. Найти число, которое будет написано на 2011 месте.
6. Собрали 100 кг грибов. Выяснилось, что влажность их равна 99%. Когда грибы подсушили, влажность их уменьшилась до 98%. Какой стала масса этих грибов после подсушивания?
7. Петя съел $\frac{1}{3}$ всех яблок и еще 2 яблока, Коля съел $\frac{1}{4}$ всех яблок и еще 1 яблоко, а Витя – половину тех яблок, которые остались после Пети и Коли. После этого осталось $\frac{1}{6}$ от начального количества яблок. Сколько яблок было сначала?
8. В купе одного из вагонов поезда едут шесть пассажиров, живущих в разных городах: Москве, Санкт-Петербурге, Минске, Киеве, Харькове, Одессе. Их фамилии: Андреев, Борисов, Васильев, Григорьев, Дмитриев, Елисеев. При посадке Васильев помогал одесситу грузить багаж. В дороге выяснилось, что Андреев и москвич – врачи, Дмитриев и петербуржец – учителя, Васильев и минчанин – инженеры. Борисов и Елисеев – служили в армии, а минчанин в армии не служил. Андреев и харьковчанин вышли в Киеве, а Васильев поехал дальше. Елисеев вел спор с петербуржцем о пользе нового лекарства. Определить местожительство каждого из пассажиров, а затем указать их профессии.
5. Можно ли заложить таблицу 10×14 фигурками вида  так, чтобы они не пересекались и не выходили за рамки таблицы?

*На виконання роботи відводиться 4 години
Кожне завдання оцінюється в 7 балів
Використання калькуляторів не дозволяється*

62 олімпіада юних математиків

2011-2012 навч. рік

8 клас

1. Числа a, b, c такі, що $a+b+c=7$, $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = 0,7$. Знайти значення виразу $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}$.
2. Побудувати графік функції: $y = \frac{x}{|x|} + \frac{|x+2|}{x+2} + |x-2|$.
3. У прямокутному трикутнику катет завдовжки 12см прилягає до кута 30° . Знайти довжину бісектриси другого гострого кута трикутника.
4. Чи є число $2011^2 + 2012^2 + (2011 \cdot 2012)^2$ точним квадратом?
5. Довести, що $n^5 - 5n^3 + 4n$ ділиться на 120.

62 олімпіада юних математиків

2011-2012 навч. рік

8 клас

1. Числа a, b, c такі, що $a+b+c=7$, $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = 0,7$. Знайти значення виразу $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}$.
2. Побудувати графік функції: $y = \frac{x}{|x|} + \frac{|x+2|}{x+2} + |x-2|$.
3. У прямокутному трикутнику катет завдовжки 12см прилягає до кута 30° . Знайти довжину бісектриси другого гострого кута трикутника.
4. Чи є число $2011^2 + 2012^2 + (2011 \cdot 2012)^2$ точним квадратом?
5. Довести, що $n^5 - 5n^3 + 4n$ ділиться на 120.

8 класс

1. Числа a, b, c такие, что $a + b + c = 7$, $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = 0,7$. Найти значение выражения $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}$.
2. Построить график функции: $y = \frac{x}{|x|} + \frac{|x+2|}{x+2} + |x-2|$.
3. В прямоугольном треугольнике катет длиной 12 см прилегает к углу 30° . Найти длину биссектрисы другого острого угла треугольника.
4. Является ли число $2011^2 + 2012^2 + (2011 \cdot 2012)^2$ точным квадратом?
5. Доказать, что $n^5 - 5n^3 + 4n$ делится на 120.

*На виконання роботи відводиться 4 години
Кожне завдання оцінюється в 7 балів
Використання калькуляторів не дозволяється*

8 класс

6. Числа a, b, c такие, что $a + b + c = 7$, $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = 0,7$. Найти значение выражения $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}$.
7. Построить график функции: $y = \frac{x}{|x|} + \frac{|x+2|}{x+2} + |x-2|$.
8. В прямоугольном треугольнике катет длиной 12 см прилегает к углу 30° . Найти длину биссектрисы другого острого угла треугольника.
9. Является ли число $2011^2 + 2012^2 + (2011 \cdot 2012)^2$ точным квадратом?
10. Доказать, что $n^5 - 5n^3 + 4n$ делится на 120.

*На виконання роботи відводиться 4 години
Кожне завдання оцінюється в 7 балів
Використання калькуляторів не дозволяється*

62 олімпіада юних математиків

2011-2012 навч. рік

9 клас

1. Підряд виписано 2011 чисел. Кожне з них, крім першого та останнього, дорівнює сумі двох сусідніх з ним чисел. Чому дорівнює сума всіх чисел, якщо останнє число 2012?
2. Точка дотику кола, вписаного в прямокутний трикутник, поділяє гіпотенузу на частини, що дорівнюють a і b . Знайти площу трикутника.

3. Розв'язати систему рівнянь:
$$\begin{cases} \frac{xy}{x+y} = \frac{8}{3}, \\ \frac{yz}{y+z} = \frac{12}{5}, \\ \frac{xz}{x+z} = \frac{24}{7}. \end{cases}$$

4. Записати функцію $y = \sqrt{4+4x+x^2} - \sqrt{4-4x+x^2}$ у простішому вигляді та побудувати її графік.
5. Знайти двозначне число, яке менше від суми квадратів його цифр на 11 і більше за їх подвоєний добуток на 5.

62 олімпіада юних математиків

2011-2012 навч. рік

9 клас

6. Підряд виписано 2011 чисел. Кожне з них, крім першого та останнього, дорівнює сумі двох сусідніх з ним чисел. Чому дорівнює сума всіх чисел, якщо останнє число 2012?
7. Точка дотику кола, вписаного в прямокутний трикутник, поділяє гіпотенузу на частини, що дорівнюють a і b . Знайти площу трикутника.

8. Розв'язати систему рівнянь:
$$\begin{cases} \frac{xy}{x+y} = \frac{8}{3}, \\ \frac{yz}{y+z} = \frac{12}{5}, \\ \frac{xz}{x+z} = \frac{24}{7}. \end{cases}$$

9. Записати функцію $y = \sqrt{4+4x+x^2} - \sqrt{4-4x+x^2}$ у простішому вигляді та побудувати її графік.
10. Знайти двозначне число, яке менше від суми квадратів його цифр на 11 і більше за їх подвоєний добуток на 5.

9 класс

1. Подряд записаны 2011 чисел. Каждое из которых, кроме первого и последнего, равно сумме двух соседних с ним чисел. Чему равна сумма всех чисел, если последнее число 2012?
2. Точка касания окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, делит гипотенузу на части, равные a и b . Найти площадь треугольника.

3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{xy}{x+y} = \frac{8}{3}, \\ \frac{yz}{y+z} = \frac{12}{5}, \\ \frac{xz}{x+z} = \frac{24}{7}. \end{cases}$$

4. Записать функцию $y = \sqrt{4+4x+x^2} - \sqrt{4-4x+x^2}$ в более простом виде и построить ее график.
5. Найти двузначное число, которое меньше суммы квадратов его цифр на 11 и больше их удвоенного произведения на 5.

*На виконання роботи відводиться 4 години
Кожне завдання оцінюється в 7 балів
Використання калькуляторів не дозволяється*

9 класс

6. Подряд записаны 2011 чисел. Каждое из которых, кроме первого и последнего, равно сумме двух соседних с ним чисел. Чему равна сумма всех чисел, если последнее число 2012?
7. Точка касания окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, делит гипотенузу на части, равные a и b . Найти площадь треугольника.

8. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{xy}{x+y} = \frac{8}{3}, \\ \frac{yz}{y+z} = \frac{12}{5}, \\ \frac{xz}{x+z} = \frac{24}{7}. \end{cases}$$

9. Записать функцию $y = \sqrt{4+4x+x^2} - \sqrt{4-4x+x^2}$ в более простом виде и построить ее график.
10. Найти двузначное число, которое меньше суммы квадратов его цифр на 11 и больше их удвоенного произведения на 5.

*На виконання роботи відводиться 4 години
Кожне завдання оцінюється в 7 балів
Використання калькуляторів не дозволяється*

62 олімпіада юних математиків

2011-2012 навч. рік

10 клас

1. З пункту А в пункт В та з В в А одночасно вийшли два пішоходи. Коли перший пройшов половину шляху, другому залишилось пройти 24км, а коли другий пройшов половину шляху, першому залишилось пройти 15км. Скільки кілометрів залишиться пройти другому пішоходу після того, як перший закінчить перехід?
2. Розв'язати рівняння: $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt[3]{8 - x^2} = 3$.
3. Три висоти трикутника перетинаються в точці О, яка поділяє одну з них навпіл, другу у відношенні 2:1, рахуючи від вершини. В якому відношенні точка О поділяє третю висоту?
4. Побудувати графік функції: $|y| = \frac{|x-1|}{x^2 - 1}$.
5. Скільки розв'язків в залежності від параметра a має система:
$$\begin{cases} |x| + |y| = a, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

62 олімпіада юних математиків

2011-2012 навч. рік

10 клас

6. З пункту А в пункт В та з В в А одночасно вийшли два пішоходи. Коли перший пройшов половину шляху, другому залишилось пройти 24км, а коли другий пройшов половину шляху, першому залишилось пройти 15км. Скільки кілометрів залишиться пройти другому пішоходу після того, як перший закінчить перехід?
7. Розв'язати рівняння: $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt[3]{8 - x^2} = 3$.
8. Три висоти трикутника перетинаються в точці О, яка поділяє одну з них навпіл, другу у відношенні 2:1, рахуючи від вершини. В якому відношенні точка О поділяє третю висоту?
9. Побудувати графік функції: $|y| = \frac{|x-1|}{x^2 - 1}$.
10. Скільки розв'язків в залежності від параметра a має система:
$$\begin{cases} |x| + |y| = a, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

10 класс

1. Из пункта А в пункт В и из В в А одновременно вышли два пешехода. Когда первый прошел половину пути, второму осталось пройти 24 км, а когда второй прошел половину пути, первому осталось пройти 15 км. Сколько километров останется пройти второму пешеходу после того, как первый закончит путь?
2. Решить уравнение: $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt[3]{8 - x^2} = 3$.
3. Три высоты треугольника пересекаются в точке О, которая делит одну из них пополам, вторую в отношении 2:1, считая от вершины. В каком отношении точка О делит третью высоту?
4. Построить график функции $|y| = \frac{|x-1|}{x^2 - 1}$.
5. Сколько решений в зависимости от параметра **a** имеет система:
$$\begin{cases} |x| + |y| = a, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

*На виконання роботи відводиться 4 години
Кожне завдання оцінюється в 7 балів
Використання калькуляторів не дозволяється*

10 класс

1. Из пункта А в пункт В и из В в А одновременно вышли два пешехода. Когда первый прошел половину пути, второму осталось пройти 24 км, а когда второй прошел половину пути, первому осталось пройти 15 км. Сколько километров останется пройти второму пешеходу после того, как первый закончит путь?
2. Решить уравнение: $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt[3]{8 - x^2} = 3$.
3. Три высоты треугольника пересекаются в точке О, которая делит одну из них пополам, вторую в отношении 2:1, считая от вершины. В каком отношении точка О делит третью высоту?
4. Построить график функции $|y| = \frac{|x-1|}{x^2 - 1}$.
5. Сколько решений в зависимости от параметра **a** имеет система:
$$\begin{cases} |x| + |y| = a, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

*На виконання роботи відводиться 4 години
Кожне завдання оцінюється в 7 балів
Використання калькуляторів не дозволяється*

62 олімпіада юних математиків

2011-2012 навч. рік

11 клас

1. Дано опуклий чотирикутник $ABCD$ такий, що $\angle ABC = 90^\circ$, $AC = CD$ і $\angle BCA = \angle ACD$. Точка F - середина відрізка AD . Відрізки BF і AC перетинаються в точці L . Довести, що $BC = CL$.
2. Довести нерівність: $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq \frac{2n-1}{n}$. ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$)
3. Побудувати графік функції: $y = \sqrt{1 - \cos^2 x} \cdot \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x} \cdot \sqrt{4x^2 + 4x + 1}$.
4. Розв'язати рівняння: $x^2 - \sin^2 y = 2x \cos y - 1 - y^2$.
5. В посуді знаходиться 10%-й розчин спирту. З посуду відлили $\frac{1}{3}$ його вмісту, а в частину, що залишилась, долили води так, що посуд став заповненим на $\frac{5}{6}$ від початкового об'єму. Який процентний вміст спирту в посуді?

62 олімпіада юних математиків

2011-2012 навч. рік

11 клас

6. Дано опуклий чотирикутник $ABCD$ такий, що $\angle ABC = 90^\circ$, $AC = CD$ і $\angle BCA = \angle ACD$. Точка F - середина відрізка AD . Відрізки BF і AC перетинаються в точці L . Довести, що $BC = CL$.
7. Довести нерівність: $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq \frac{2n-1}{n}$. ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$)
8. Побудувати графік функції: $y = \sqrt{1 - \cos^2 x} \cdot \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x} \cdot \sqrt{4x^2 + 4x + 1}$.
9. Розв'язати рівняння: $x^2 - \sin^2 y = 2x \cos y - 1 - y^2$.
10. В посуді знаходиться 10%-й розчин спирту. З посуду відлили $\frac{1}{3}$ його вмісту, а в частину, що залишилась, долили води так, що посуд став заповненим на $\frac{5}{6}$ від початкового об'єму. Який процентний вміст спирту в посуді?

11 класс

1. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$ такой, что $\angle ABC = 90^\circ$, $AC = CD$ и $\angle BCA = \angle ACD$. Точка F - середина отрезка AD . Отрезки BF и AC пересекаются в точке L . Доказать, что $BC = CL$.
2. Доказать неравенство: $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq \frac{2n-1}{n}$. ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$).
3. Построить график функции: $y = \sqrt{1 - \cos^2 x} \cdot \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x} \cdot \sqrt{4x^2 + 4x + 1}$.
4. Решить уравнение: $x^2 - \sin^2 y = 2x \cos y - 1 - y^2$.
5. В сосуде находится 10%-й раствор спирта. Из сосуда отлили $\frac{1}{3}$ его содержимого, оставшуюся часть долили водой так, что сосуд оказался наполненным на $\frac{5}{6}$ первоначального объема. Какое процентное содержание спирта оказалось в сосуде?

*На виконання роботи відводиться 4 години
Кожне завдання оцінюється в 7 балів
Використання калькуляторів не дозволяється*

11 класс

6. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$ такой, что $\angle ABC = 90^\circ$, $AC = CD$ и $\angle BCA = \angle ACD$. Точка F - середина отрезка AD . Отрезки BF и AC пересекаются в точке L . Доказать, что $BC = CL$.
7. Доказать неравенство: $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq \frac{2n-1}{n}$. ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$).
8. Построить график функции: $y = \sqrt{1 - \cos^2 x} \cdot \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x} \cdot \sqrt{4x^2 + 4x + 1}$.
9. Решить уравнение: $x^2 - \sin^2 y = 2x \cos y - 1 - y^2$.
10. В сосуде находится 10%-й раствор спирта. Из сосуда отлили $\frac{1}{3}$ его содержимого, оставшуюся часть долили водой так, что сосуд оказался наполненным на $\frac{5}{6}$ первоначального объема. Какое процентное содержание спирта оказалось в сосуде?

*На виконання роботи відводиться 4 години
Кожне завдання оцінюється в 7 балів
Використання калькуляторів не дозволяється*