

## 60 Олімпіада юних математиків

2009 – 2010 навч. рік

### 6 клас

1. Знайти шостий член послідовності 5, 12, 26, 47, ...
2. Перше число складає 40% від другого. Скільки відсотків складає друге число від першого?
3. Малюк може з'їсти торт за 10 хвилин, банку варення – за 8 хвилин і випити горщик молока за 12 хвилин; а Карлсон може це зробити за 2, 3, 4 хвилини відповідно. За який час вони можуть разом з'їсти торт, банку варення, випити горщик молока?
4. Чи можна 17 точок сполучити відрізками так, щоб з кожної точки виходило 3 або 5 відрізків?
5. Петро та Іван грають в гру. За першим ходом Петро називає число, що не перевищує 6, а Іван додає до нього деяке число, що також не перевищує 6, і називає суму. Далі Петро до названої суми додає число, не більше 6 і називає нову суму і т.д. Виграє той, хто першим назве число 2010. Хто може забезпечити собі виграш?

### 6 класс

1. Найти шестой член последовательности 5, 12, 26, 47, ...
2. Первое число составляет 40% второго. Сколько процентов составляет второе число от первого?
3. Малыш может съесть торт за 10 минут, банку варенья – за 8 минут и выпить горшочек молока за 12 минут; а Карлсон может это сделать за 2, 3, 4 минуты соответственно. За какое время они могут вместе съесть торт, банку варенья и выпить горшочек молока?
4. Можно ли 17 точек соединить отрезками так, чтобы из каждой точки выходило 3 или 5 отрезков?
5. Петя и Ваня играют в игру. Первым ходом Петя называет число, не превышающее 6, а Ваня прибавляет к нему некоторое число, которое тоже не превышает 6, и называет сумму. Дальше Петя к названной сумме прибавляет число, не превышающее 6, и называет новую сумму и т.д. Выигрывает тот, кто первым назовет число 2010. Кто может обеспечить себе выигрыш?

На виконання роботи відводиться 3 години.  
Кожне завдання оцінюється в 7 балів.  
Використання калькуляторів не дозволяється

## 60 Олімпіада юних математиків

2009 – 2010 навч. рік

### 7 клас

1. Знайти два числа, якщо їх сума дорівнює 2296, а при діленні більшого з них на 14 у частці утворюється половина меншого з чисел, а в остачі 8.
2. В Афінах була водойма з трьома трубами. Перша труба могла наповнити водойму за 1 годину, друга – за 2 години, а третя – за 6 годин. За який час усі три труби, працюючи разом, могли наповнити водойму?
3. На колі розставлено 2010 точок. Кожен з двох гравців за один хід може з'єднати будь-які точки відрізком, що не перетинає відрізки, які раніше вже були проведені. Програє той, хто не може зробити свій черговий хід. Хто з гравців може забезпечити собі вигравш? Відповідь обґрунтувати.
4. До просушки вологість зерна дорівнювала 23%, а після просушки – 12%. На скільки відсотків зменшилася вага зерна після просушки?
5. Автобус проїхав півдороги зі швидкістю, удвічі меншою, ніж заплановано. Чи зможе він, збільшивши швидкість, приїхати вчасно? Якщо так, то в скільки разів йому потрібно збільшити заплановану швидкість?

### 7 класс

1. Найти два числа, если их сумма равна 2296, а при делении большего числа на 14 в частном получается половина меньшего числа, а в остатке 8.
2. В Афинах был водоём с тремя трубами. Первая труба могла наполнить водоём за 1 час, вторая – за 2 часа, а третья – за 6 часов. За какое время могли наполнить водоём все три трубы, работая одновременно?
3. На окружности расставлены 2010 точек. Каждый из двух игроков за один ход может соединить две точки отрезком, не пересекающим ранее проведенные отрезки. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш? Ответ обосновать.
4. До просушки влажность зерна была 23%, а после просушки – 12%. На сколько процентов уменьшилась влажность зерна после просушки?
5. Автобус проехал полпути со скоростью вдвое меньшей, чем запланировано. Может ли он, увеличив скорость, приехать вовремя? Если да, то во сколько раз ему необходимо увеличить запланированную скорость?

На виконання роботи відводиться 4 години.

Кожне завдання оцінюється в 7 балів.  
Використання калькуляторів не дозволяється

## 60 Олімпіада юних математиків

2009 – 2010 навч. рік

### 8 клас

1. В прямокутному трикутнику сума радіусів вписаного та описаного кіл дорівнює 21 см. Знайти периметр цього трикутника, якщо гіпотенуза трикутника дорівнює 36 см.
2. Микола з сином і Петро з сином були на рибалці. Микола спіймав стільки ж риби, скільки і його син, а Петро – втричі більше, ніж його син. Всього було спіймано 25 риби. Як звали сина Петра?
3. За допомогою циркуля і лінійки розділити на три рівні частини кут  $54^\circ$ .
4. Є 2009 камінців. За один хід можна взяти 1, 3, або 5 камінців. Хто виграє з двох гравців, якщо виграє той, хто бере останній камінець?
5. Розкласти у добуток вираз  $(x + y + z) \cdot (xy + xz + yz) - xyz$ .

### 8 класс

1. В прямоугольном треугольнике сумма радиусов вписанной и описанной окружностей равна 21 см. Найти периметр этого треугольника, если гипотенуза треугольника равна 36 см.
2. Николай с сыном и Петр с сыном были на рыбалке. Николай поймал столько же рыб, сколько и его сын, а Петр - втрое больше своего сына. Всего было поймано 25 рыб. Как звали сына Петра?
3. С помощью циркуля и линейки разделить на три равные части угол  $54^\circ$ .
4. Имеется 2009 камешков. За один ход можно взять 1, 3, или 5 камешков. Кто выиграет из двух игроков, если выигрывает тот, кто берет последний камешек?
5. Разложить в произведение выражение  $(x + y + z) \cdot (xy + xz + yz) - xyz$ .

На виконання роботи відводиться 4 години.

Кожне завдання оцінюється в 7 балів.  
Використання калькуляторів не дозволяється

## 60 Олімпіада юних математиків

2009 – 2010 навч. рік

### 9 клас

1. З довільної точки М всередині даного кута А опущено перпендикуляри МР і MQ на сторони кута. Опустимо з точки А перпендикуляр АК на відрізок PQ. Довести, що  $\angle PAK = \angle MAQ$ .
2. Учні надіслали завдання, яке містить 20 задач. За кожну правильно розв'язану задачу йому нараховують 8 балів, за кожну неправильно розв'язану задачу віднімають 5 балів. За задачу, яку він не брався розв'язувати – 0 балів. Учень одержав у сумі 13 балів. Скільки задач він брався розв'язувати?
3. Розкласти вираз  $x^8 + x^4 + 1$  на чотири множники.
4. Побудувати графік функції:  $y = \frac{|x+1|}{x+1} - \frac{x^2}{|x|}$ .
5. Розв'язати нерівність:  $|x-1| + |5-x| \geq 4$ .

### 9 класс

1. Из произвольной точки М внутри угла А опущены перпендикуляры МР и MQ на стороны угла. Опустим из точки А перпендикуляр АК на отрезок PQ. Доказать, что  $\angle PAK = \angle MAQ$ .
2. Ученику прислали задание, содержащее 20 задач. За каждую правильно решенную задачу ему насчитывают 8 баллов, а за каждую неверно решенную задачу отнимают 5 баллов. За задачу, которую он не начинал решать – 0 баллов. Ученик получил в сумме 13 баллов. Сколько задач он начинал решать?
3. Разложить выражение  $x^8 + x^4 + 1$  на четыре множителя.
4. Построить график функции:  $y = \frac{|x+1|}{x+1} - \frac{x^2}{|x|}$ .
5. Решить неравенство:  $|x-1| + |5-x| \geq 4$ .

На виконання роботи відводиться 4 години.  
Кожне завдання оцінюється в 7 балів.  
Використання калькуляторів не дозволяється

### 60 Олімпіада юних математиків

2009 – 2010 навч. рік

#### 10 клас

1. Розв'язати рівняння:  $7\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 9$ .
2. При яких числах  $a$  і  $b$  многочлен  $ax^4 + bx^3 + 17x^2 - 12x + 20$  ділиться без остачі на многочлен  $(x - 2)^2$ ?
3. Побудувати графік функції:  $y = \sqrt{6 + x - 4\sqrt{x + 2}} + \sqrt{x + 2}$ .
4. Дано коло, АВ – хорда кола,  $l$  – його дотична, що дотикається до кола в точці С. Відстані від точок А і В до прямої  $l$  відповідно дорівнюють 6 і 8. Знайти відстань від точки С до прямої АВ.
5. Довести, що для всіх  $x, y, z$  таких, що  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x^2 + z^2 = 1$ ,  $z^2 + y^2 = 1$ , має місце нерівність  $xy + yz + zx \leq \frac{3}{2}$ .

с

На виконання роботи відводиться 4 години.  
Кожне завдання оцінюється в 7 балів.  
Використання калькуляторів не дозволяється

### 60 Олімпіада юних математиків

2009 – 2010 навч. рік

#### 11 клас

1. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями  $y = x^2 - 6|x| + 5$  та  $y = x + 5$ .
2. Довести нерівність  $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \leq 9$  при  $a + b + c = 6$ .
3. Вкладник поклав 2010 грн в банк на 10 років. В якому випадку він отримає більше грошей: якщо раз в році йому нараховуватимуть 12%

від суми на рахунку, чи якщо кожний місяць йому нараховуватимуть 1% від суми на рахунку?

4. Побудувати графік функції:  $y = \sqrt{\cos^2 x} \cdot \sin x + \sqrt{1 - \cos^2 x} \cdot \cos x$ .
5. У трикутнику дві медіани взаємно перпендикулярні і дорівнюють 18 см і 24 см. Знайти площу цього трикутника.

## 11 клас

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2 - 6|x| + 5$  и  $y = x + 5$ .
2. Доказать неравенство  $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \leq 9$  при  $a + b + c = 6$ .
3. Вкладчик положил 2010 грн в банк на 10 лет. В каком случае он получит больше денег: если раз в год ему будут начислять 12% от суммы на счету, или если каждый месяц ему будут начислять 1% от суммы на счету?
4. Построить график функции:  $y = \sqrt{\cos^2 x} \cdot \sin x + \sqrt{1 - \cos^2 x} \cdot \cos x$ .
5. В треугольнике две медианы взаимно перпендикулярны и равны 18 см и 24 см. Найти площадь этого треугольника.

На виконання роботи відводиться 4 години.

Кожне завдання оцінюється в 7 балів.

Використання калькуляторів не дозволяється